

Frazioni e difficoltà in Matematica

Fractions and difficulties in Mathematics

Fracciones y dificultades en Matemática

Michele Giuliano Fiorentino¹ e Giuditta Ricciardiello²

¹Dipartimento di Matematica

²Dipartimento di Scienze della Formazione, Psicologia e Comunicazione
Università di Bari, Italia

Sunto. *In questo lavoro si analizzano gli esiti di un percorso di formazione sul tema delle Frazioni e Numeri Razionali. Si affrontano riflessioni di tipo didattico e metodologico sui contenuti necessari per l'insegnamento di questo argomento e ci si occupa di indagare se i fattori non cognitivi come l'ansia da insegnamento da parte dei docenti, possano avere delle ripercussioni sui risultati degli studenti. Viene effettuata un'analisi di tipo quantitativo e qualitativo, infatti agli insegnanti è stata somministrata un'intervista scritta con domande relative alla loro disposizione emotiva e alla preoccupazione rispetto all'insegnamento di frazioni e numeri razionali e i seguenti test, per indagare alcuni fattori di tipo emotivo: il test AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) nella sua versione italiana; il test MTAS, Mathematic Teaching Anxiety Scale; il test MESI (Metacognizione, Emozioni, Strategie, Insegnamento).*

Parole chiave: frazioni, numeri razionali, didattica della Matematica, psicologia.

Abstract. *In this paper we analyze the results of a training course on the topic of Fractions and Rational Numbers. Didactic and methodological reflections on the contents necessary for the teaching of this topic are addressed and we investigate who non-cognitive factors such, as teaching anxiety, could influence students' results. A quantitative and qualitative analysis is carried out, indeed teachers were given a written interview with questions related to their emotional disposition and concerning the teaching of fractions and rational numbers. Then teachers were asked to answer the following tests: AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) in its Italian version; MTAS (Mathematic Teaching Anxiety Scale); MESI (Metacognition, Emotions, Strategies, Teaching).*

Keywords: fractions; rational numbers; Mathematics Education; psychology.

Resumen. *Este trabajo analiza los resultados de un curso de capacitación sobre el*

tema de Fracciones y Números Racionales. Se abordan reflexiones didácticas y metodológicas sobre los contenidos necesarios para la enseñanza de este tema y se investiga si factores no cognitivos como la ansiedad de parte de los docentes en la enseñanza de este tema puedan tener repercusiones en los resultados de los estudiantes. Se realiza un análisis cuantitativo y cualitativo, de hecho a los docentes se les suministró una entrevista escrita con preguntas relacionadas con su disposición emocional e inquietud respecto a la enseñanza de fracciones y números racionales y los siguientes tests, para investigar algunos factores de carácter emocional: el AMAS (Escala abreviada de ansiedad matemática) en su versión italiana; la prueba MTAS (Escala de Ansiedad en la Enseñanza de la Matemática); el test MESI (Metacognición, Emociones, Estrategias, Enseñanza).

Parablas clave: fracciones, números racionales, didáctica de la matemática, psicología.

1. Introduzione

Quello delle Frazioni e Numeri Razionali è un tema molto indagato nell'ambito della didattica della matematica a causa delle difficoltà di apprendimento e di insegnamento che genera. Tali difficoltà sono legate a fattori cognitivi, emotivi e metacognitivi (Butterworth, 2005; D'Amore et al., 2006; Dowker, 2005). Studi recenti evidenziano come il dialogo tra *Mathematics Education e Developmental Psychology* (Dowker, 2005) apporti significativi contributi alla ricerca, dando vita a percorsi che da un lato permettono di individuare e analizzare alcune tra le principali difficoltà di apprendimento, dall'altro studiano i fattori emotivi che intervengono nel processo di insegnamento/apprendimento in ottica vygotskiana.

Nonostante la vasta letteratura dedicata a questo tema e le molteplici proposte didattiche innovative, le frazioni e i numeri razionali continuano a rappresentare uno dei principali ostacoli nel curriculum scolastico sia in riferimento al processo di insegnamento sia a quello di apprendimento, sin dalla scuola primaria.

Il presente articolo si inquadra in una ricerca molto ampia che ha indagato quali sono i fattori psicologici non cognitivi di insegnanti e studenti che possono favorire o inibire il successo nelle performance matematiche in attività con le frazioni. In particolare, questo articolo si focalizza sull'analisi degli esiti di un percorso di formazione che ha coinvolto 36 insegnanti di scuola primaria e 14 di secondaria di primo grado. Oltre alle riflessioni di tipo didattico e metodologico sui contenuti necessari per insegnare bene l'argomento (Even et al., 2009; Shulman, 1986; Van Dooren et al., 2015), il presente studio si occupa di indagare se i fattori non cognitivi come l'ansia da insegnamento da parte dei docenti, possano avere delle ripercussioni sui risultati degli studenti.

Un'intervista scritta e un questionario sugli errori e sulle difficoltà degli

studenti hanno rappresentato il punto di avvio della ricerca, per progettare l'intervento di formazione dei 50 docenti coinvolti. L'analisi delle risposte ha permesso di elaborare un percorso che tenesse conto dei contenuti didattici da affrontare in classe sulla base di teorie della didattica della matematica e di approcci metodologici che fossero funzionali a rendere il docente maggiormente sicuro e più consapevole delle sue conoscenze e meno preoccupato di come progettare attività didattiche efficaci.

2. Quadro di riferimento teorico

2.1 *Le difficoltà di apprendimento dei numeri razionali e delle frazioni come contenuto matematico: teorie di riferimento*

Gli studi sulle difficoltà di apprendimento di frazioni e numeri razionali sono ampiamente sviluppati a livello nazionale ed internazionale, attraverso la doppia lente della Mathematics Education e Developmental Psychology, proprio a causa della estrema complessità dell'argomento dal punto di vista epistemologico, ontogenetico e soprattutto didattico (D'Amore et al., 2019).

Le maggiori difficoltà derivano proprio dalle complessità intrinseche al concetto matematico stesso. Nella sua storia evolutiva il concetto matematico, infatti, ha generato gli ostacoli che a tutt'oggi permangono nel percorso di apprendimento degli studenti di tutte le età e di tutti i paesi del mondo (Torbeyns et al., 2015). Sono proprio queste iniziali difficoltà a segnare uno dei primi momenti di frattura tra il discente e la disciplina, sin dalle prime classi della scuola dell'obbligo (Pellerey et al., 1996) o che causano successive difficoltà nella costruzione di concetti matematicamente sempre più complessi e nel conseguimento di risultati scolastici soddisfacenti, nei gradi di scuola superiori (Obersteiner et al., 2019; Siegler et al., 2012; Torbeyns et al., 2015).

Le frazioni, i numeri razionali e la loro aritmetica rappresentano un elemento fondamentale per le teorie dello sviluppo cognitivo dello studente in generale e per lo sviluppo numerico in particolare (Dehaene, 1997; Hersh & Dehaene, 1998; Lortie-Forgues et al., 2015) e rappresentano uno dei temi maggiormente predittivi del successo scolastico con la matematica più avanzata (Lortie-Forgues et al., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017).

La *Teoria integrata dello sviluppo numerico* elaborata da Siegler (Siegler & Lortie-Forgues, 2014) mette in evidenza gli elementi di continuità tra i diversi insiemi numerici, considerando un modello unitario e coerente nello sviluppo della umana capacità di comprendere i numeri, lungo tutto l'arco della vita. Essa si fonda sul presupposto che per acquisire la comprensione e la conoscenza delle frazioni si debbano compiere alcuni passaggi concettuali nel processo di apprendimento: secondo questa teoria tutti i numeri rappresentano una grandezza

e possono essere per questo confrontati e ordinati su un'unica retta numerica (Lortie-Forgues et al., 2015; Resnick et al., 2016). Le difficoltà sorgono nell'estensione da un insieme numerico all'altro. Si scopre infatti che alcune delle proprietà invarianti dei numeri razionali non appartengono ai numeri interi, che si comportano in modo differente. In accordo con Vosniadou (1994), vi è un cambio di visione concettuale nel passaggio da un insieme ad un altro, definito 'Conceptual change approach', che rende possibile la progressione della conoscenza. In tale passaggio si manifesta una contrapposizione tra le caratteristiche di ciascuno dei diversi insiemi numerici, che permette di riflettere sulle cause delle maggiori difficoltà di apprendimento delle frazioni e dei numeri razionali. Una tra le principali cause delle difficoltà è il 'Natural Number Bias' (NNB) (Ni & Zhou, 2005), ovvero quella tendenza innata della cognizione umana ad applicare ai numeri razionali le proprietà dei numeri naturali, cadendo in una serie di errori che dipendono proprio dalla estensione dei comportamenti invarianti (Courant & Robbins, 2009).

Un'altra difficoltà che affonda le sue motivazioni nel significato più profondo di numero razionale è quella di frazione come rapporto. Il numero razionale nasce per poter rendere possibile la divisione, operazione che in \mathbb{N} non è sempre possibile (Villani, 2014).

Da un punto di vista più strettamente semantico dei numeri razionali, in letteratura moltissimi studi si sono concentrati sulla molteplicità di registri semiotici utilizzati per rappresentare questi numeri, considerando i significati più profondi che li caratterizzano (Fandiño Pinilla, 2023).

È proprio questa molteplicità di significati e di rappresentazioni a rendere questo tipo di numeri particolarmente interessante e allo stesso tempo estremamente complesso. Kieren ha per primo messo in evidenza i costrutti che caratterizzano i numeri razionali (decimali, rapporti, percentuali, quoziente), individuando in questa molteplicità di sfaccettature una delle maggiori cause delle difficoltà di apprendimento ad essi legate (Kieren, 1976).

I diversi approcci delle teorie presentate considerano la natura complessa del concetto di numero razionale a livello epistemologico e analizzano le più diffuse difficoltà a livello concettuale e procedurale.

Inoltre, la necessità di presentare il concetto di frazione nella sua interezza e non in modo frammentato puntando l'attenzione sui singoli costrutti che lo rappresentano, induce ad individuare uno schema che unifichi tali costrutti, cercando di metterli in relazione e operando una costruzione graduale di significati (Carpenter et al., 1993; Prediger, 2008).

In letteratura, inoltre, sono presenti studi che analizzano gli errori più comuni, che si manifestano nelle operazioni con le frazioni. In questo ambito uno degli errori più diffusi è riconducibile al NNB e si manifesta, nell'addizione tra due

frazioni con denominatore diverso, attraverso la somma separata di numeratori e denominatori (Lortie-Forgues et al., 2015). Questo errore mette in luce una ‘generalizzazione inappropriata rispetto alle procedure aritmetiche dei numeri interi corrispondenti’ (Lortie-Forgues et al., 2015) e si verifica in tutte le parti del mondo.

2.2 Le teorie di riferimento per la formazione degli insegnanti. Una possibile strada per ridurre le difficoltà di apprendimento

La formazione degli insegnanti è uno tra gli argomenti portanti in Mathematics Education, in un quadro complesso e articolato che considera il processo di apprendimento strettamente legato a quello di insegnamento. Negli ultimi anni si sono sviluppati filoni di ricerca in quest’area e da essi sono emerse diverse teorie particolarmente significative e tra loro interconnesse.

La teoria di Shulman (1986) ha aperto la strada ad una serie di riflessioni che riguardano non solo le conoscenze disciplinari necessarie per poter insegnare una determinata disciplina, ma soprattutto quei fattori di natura pedagogica che sono intrinseci nell’azione didattica del docente e che costituiscono ciò che l’autore definisce come Pedagogical Content Knowledge (PCK). Si tratta, secondo Shulman, di tutti quegli argomenti chiave che afferiscono ad una data disciplina, a tutte le loro rappresentazioni, alle più efficaci analogie o immagini legate ai concetti, agli esempi, agli errori più comuni, alle concezioni e, ancor di più, alle misconcezioni degli studenti riferite a ciò che deve essere insegnato, in un determinato ambito.

Per quel che concerne specificatamente la matematica, la teoria di Shulman fornisce una base per proporre diverse concettualizzazioni e modelli di conoscenza degli insegnanti, come per esempio il modello Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Hill et al., 2008). Tale modello teorico si sofferma non solo sulle conoscenze contenutistiche necessarie all’insegnante di matematica per poter insegnare, ma soprattutto su quali siano le conoscenze necessarie all’insegnante per ‘gestire’ l’errore in matematica, con una finalità costruttiva e produttiva. Più recente e maggiormente focalizzato è il modello del Mathematical Teacher’s Specialised Knowledge (MKTS) (Carrillo-Yañez et al., 2018), che afferisce ad un dominio nuovo rispetto alla Subject Matter Knowledge e alla Pedagogical Content Knowledge individuate da Shulman. La conoscenza disciplinare è necessariamente specializzata e va considerata secondo una visione olistica, complessa e articolata: in altre parole, il contenuto che deve essere insegnato non basta a sé stesso ma va inserito in una categoria più ampia che abbracci anche tutti quegli aspetti pedagogici che sono indissolubilmente legati ad esso.

In questo quadro così variegato si aggiungono ulteriori studi di Ball & Even

(2009) che forniscono una prospettiva per l'implementazione di interventi educativi che tengono conto della complessa articolazione di diversi contenuti e delle loro relazioni, suggerendo modi di intervenire nella pratica. Ball & Even (2009) sostengono che è fondamentale concentrare in modo efficace l'educazione degli insegnanti sulla pratica.

Questa situazione di 'formazione attraverso e nella pratica' (Even et al., 2009) consente al docente di autoregolarsi, di focalizzare l'attenzione sui processi attivati in una situazione di apprendimento, acquisendo piena consapevolezza di tutti gli elementi e delle conoscenze che sono necessarie e che caratterizzano i concetti in gioco.

Tenendo conto dell'obiettivo generale di far sviluppare al docente alcune conoscenze sullo sviluppo della sua professione, Fiorentino et al. (2023) hanno elaborato una nuova metodologia, che cerca di descrivere come effettuare una formazione in pratica. Essa ha lo scopo di concatenare l'esperienza dei docenti vissuta direttamente nella pratica di formazione di un determinato modello pedagogico, con la nuova esperienza di riflessione sulla loro precedente attività vissuta, individuando gli aspetti teorici chiave che caratterizzano il modello pedagogico oggetto della formazione.

In altre parole, essi elaborano un nuovo costrutto teorico, chiamato meta Discussione su un Modello Pedagogico (m-DMP), che costituisce un nuovo livello di discussione il cui obiettivo è la concettualizzazione del modello pedagogico su cui il docente si sta formando.

Come conseguenza, attraverso questa metodologia, i docenti in formazione migliorano la loro capacità di comprendere e interpretare le azioni degli studenti (Even et al., 2009) e riescono a pianificare interventi didattici basati sulla profonda analisi delle azioni e delle riflessioni degli studenti.

2.3 Le teorie didattiche per l'insegnamento e apprendimento di concetti matematici (e non solo delle frazioni)

La formazione dei docenti deve avere come obiettivo ultimo quello di rendere i docenti autonomi nel progettare attività di senso che favoriscano la corretta costruzione del concetto su cui si sta lavorando. Per essere efficace, dunque, il percorso deve affrontare l'aspetto più propriamente didattico e metodologico.

Una delle teorie che supporta le azioni dell'insegnante e favorisce la costruzione di concetti matematici è quella della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). La TMS ha le sue radici nel socio-costruttivismo vygotskiano, secondo il quale gli studenti sono guidati dal loro insegnante a costruire conoscenze matematiche risolvendo compiti con l'uso di artefatti appositamente progettati e scelti.

L'attività di risoluzione di un problema aperto (Pehkonen, 1997) attraverso

l'uso degli artefatti, conduce gli studenti in modo spontaneo a produrre conoscenze personali che, attraverso discussioni matematiche (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) orchestrate dall'insegnante, si trasformano gradualmente in conoscenze matematiche condivise. Il problema aperto, per le sue caratteristiche, coinvolge situazioni complesse e sfaccettate e richiede capacità di pensiero critico e creativo per generare nuove idee, approcci e soluzioni. La creatività implica un modo di pensare fuori dagli schemi, stabilisce connessioni tra concetti apparentemente non correlati e permette l'esplorazione di possibilità alternative. L'uso di un problema aperto è cruciale per innescare una discussione matematica ricca ed efficace, durante la quale gli studenti costruiscono i significati matematici, passando da segni situati a segni condivisi. Il problema, se ben strutturato, può risultare sufficientemente stimolante per coinvolgere gli studenti sia a livello cognitivo che emotivo, nella loro veste di risolutori.

3. Problema di ricerca

Le frazioni e i numeri razionali in alcuni casi sviluppano difficoltà sia per gli studenti, sia per gli insegnanti, generando una disposizione emotiva negativa e 'preoccupazione', che ostacola l'intero processo di insegnamento-apprendimento.

Infatti, dal punto di vista didattico l'insegnante è condizionato dai suoi misconcetti, dal punto di vista psicologico è preoccupato del possibile fallimento dei suoi studenti. In particolare, la sua preoccupazione è legata alla percezione della carenza di strumenti in suo possesso per introdurre le frazioni e i numeri razionali 'diversamente' rispetto ai percorsi didattici tradizionali, suggeriti anche dai libri di testo.

Partendo da tali ipotesi, si è cercato di dare risposte alla seguente domanda di ricerca:

- Quali sono le emozioni/preoccupazioni dei docenti riguardo le frazioni? In che modo gli studenti percepiscono tali emozioni/preoccupazioni?

Dopo aver avviato un'indagine esplorativa sulle disposizioni emotive, sulle preoccupazioni e sugli atteggiamenti degli insegnanti, riguardanti la matematica e l'insegnamento delle frazioni, attraverso la somministrazione di test psicologici e un'intervista scritta, è stato progettato un percorso di formazione con un duplice obiettivo: da un lato favorire l'acquisizione di maggiori conoscenze su questa tematica e dall'altro fornire competenze di carattere teorico e metodologico per progettare attività didattiche efficaci e infine rendere gli insegnanti più consapevoli delle proprie conoscenze per gestire le preoccupazioni.

Il percorso di formazione ha riguardato entrambe le aree, quella psicologica

e quella didattica, per studiare quali fossero le loro interconnessioni. Durante tale percorso si sono progettate diverse attività didattiche proposte successivamente nelle classi, analizzando gli effetti che tale corso ha avuto sulla progettazione e l'implementazione delle attività didattiche.

4. Metodologia della ricerca

Questo articolo presenta un percorso di ricerca sperimentale, inserito in una ricerca più ampia di tipo design-based research (Swan, 2014).

4.1 Partecipanti

Il campione dello studio è rappresentato da 50 insegnanti (36 di scuola primaria e 14 di scuola secondaria di I grado) di nove Istituti Scolastici della zona urbana di Bari e dei loro 950 alunni, circa, per un totale di 48 classi suddivise dalla terza primaria alla seconda secondaria di primo grado.

4.2 Strumenti e procedura

Il percorso sperimentale ha previsto una raccolta dati sui due campioni, docenti e alunni. La raccolta dei dati dei docenti è avvenuta in incontri pianificati on-line, sulla piattaforma Teams, attraverso dei Google Moduli. In dettaglio, agli insegnanti è stata somministrata un'intervista scritta con domande relative alla loro disposizione emotiva e alla preoccupazione rispetto all'insegnamento di frazioni e numeri razionali e i seguenti test, per indagare alcuni fattori di tipo emotivo: il test AMAS (Abbreviated Mathematics Anxiety Scale) nella sua versione italiana (Caviola et al., 2017), per valutare l'ansia da Matematica legata al ricordo; il test MTAS, Mathematic Teaching Anxiety Scale, (Hunt & Sari, 2019) che valuta l'ansia da insegnamento della matematica in due diverse dimensioni: l'ansia del docente rivolta verso sé stesso, verso la propria pratica didattica e la propria abilità percepita, definita come area del Self, e l'ansia rivolta verso i propri studenti, una sorta di preoccupazione del docente verso il raggiungimento del successo scolastico in matematica, da parte dei suoi alunni; il test MESI (Metacognizione, Emozioni, Strategie, Insegnamento) (Moè et al., 2010) che misura quegli aspetti di carattere emotivo e metacognitivo, le strategie e la soddisfazione lavorativa dell'insegnante.

Successivamente, è stato chiesto agli insegnanti di compilare un questionario sulla loro percezione rispetto agli errori più comuni commessi dagli alunni, in riferimento a quattro problemi sulle frazioni.

Da ultimo, è stata richiesta una analisi a priori sulle difficoltà e sulle possibili modalità risolutive di un problema aperto sulle frazioni. Tale problema aperto è

stato successivamente utilizzato in una progettazione didattica realizzata nelle classi.

Per validare il percorso di ricerca sperimentale è stata effettuata un'analisi qualitativa del questionario a domande aperte e dell'intervista somministrati agli insegnanti, secondo i criteri di credibilità, attendibilità, trasferibilità e confermabilità (Guba, 1981), per garantirne l'attendibilità. I ricercatori hanno ripetutamente letto i testi e li hanno interpretati individualmente, facendo riferimento alle domande di ricerca e al quadro teorico; poi hanno discusso i temi emergenti, fino a concordare quelli più rilevanti (Sharma, 2013).

I dati raccolti attraverso le misure psicologiche sono stati elaborati con il software SPSS. I dati sono analizzati, complessivamente, secondo una metodologia Mixed Method (Almalki, 2016; Bosica, 2022).

5. Il percorso di ricerca sperimentale

Il progetto di ricerca sperimentale è stato sviluppato attraverso le seguenti fasi:

Fase 1 - Raccolta dei dati attraverso la somministrazione di intervista e questionario;

Fase 2 - Formazione degli insegnanti;

Fase 3 - Sperimentazione nelle classi;

Fase 4 - Raccolta e analisi dei dati.

In questo articolo si focalizza l'attenzione sulla descrizione e l'analisi della fase 1 e della fase 2.

5.1 Fase 1 - raccolta dei dati attraverso la somministrazione di intervista e questionario

Nella prima fase si è proposta un'intervista scritta con 9 domande, ideata sulla base degli studi di Di Martino e Zan (Di Martino & Zan, 2010), nella quale si è chiesto agli insegnanti di esprimere le loro emozioni riguardo al tema frazioni e numeri razionali, al fine di indagare la loro disposizione emotiva ed eventuali credenze e misconcezioni inerenti al concetto matematico di frazione.

Il questionario poneva alcune domande inerenti allo stesso concetto, con l'obiettivo di far emergere i più comuni errori degli studenti e i diversi stati d'animo dei docenti, il loro atteggiamento rispetto all'insegnamento delle frazioni.

5.2 Fase 2 - La formazione degli insegnanti

L'intervento formativo è stato strutturato in due momenti: un primo momento di formazione on-line (a causa delle restrizioni da Covid-19), e un secondo momento di incontri in presenza per la progettazione delle attività da

sperimentare nelle diverse classi.

Durante gli incontri on-line la formazione ha riguardato gli aspetti epistemologici legati al tema di frazione e numeri razionali, alle principali difficoltà di questo contenuto matematico e agli errori più comuni commessi dagli studenti e alcune teorie e metodologie della didattica della Matematica. Questa prima parte è stata strutturata per rispondere al bisogno emerso da parte dei docenti circa i contenuti matematici: l'intervista ha evidenziato alcune incertezze di carattere epistemologico.

Si è dato poi seguito all'attività con un percorso di formazione 'in e attraverso la pratica' (Even et al., 2009) che ha consentito ai docenti coinvolti di sperimentare in prima persona, assumendo il ruolo di studenti, cosa accade durante il processo di apprendimento. Dopo aver risolto in diversi modi un problema aperto sulle frazioni, sulla base della teoria interpretativa (Carrillo-Yañez et al., 2018; Mellone et al., 2018) è stata richiesta un'analisi a priori del problema e la riflessione su protocolli risolutivi di studenti di classe V. Obiettivo di questa attività è stato quello di mettere i docenti nelle condizioni di scoprire il valore della previsione delle azioni dei loro studenti, e di acquisire la capacità di interpretare gli errori e di ipotizzare diverse possibili strategie risolutive. Questa attività è stata svolta attraverso il confronto e una discussione collettiva tra docenti. Anche questa attività è stata progettata in seguito all'analisi delle caratteristiche degli insegnanti coinvolti, per i quali abbiamo ritenuto opportuno effettuare una formazione basata sui problemi aperti, in quanto questi suscitano insicurezza per come sono strutturati.

Altro momento saliente degli incontri di formazione è stata la condivisione di un percorso metodologico e didattico innovativo, progettato sulla base della TMS, che ha riguardato la progettazione di attività sperimentali, l'individuazione di alcuni artefatti con potenziale semiotico significativo rispetto ai compiti assegnati da realizzare nelle loro classi.

Le attività progettuali, basate sui principi metodologici condivisi durante la fase di formazione, rispondevano ai diversi obiettivi per fasce di età degli studenti a cui le attività erano destinate.

6. Analisi dei risultati

6.1 Emozioni/preoccupazioni dei docenti riguardo alle frazioni

Per dare una risposta alla domanda di ricerca, in questa sezione si illustrano alcuni dei risultati preliminari particolarmente significativi, emersi dall'analisi degli strumenti di indagine qualitativa (intervista e questionario) usati con gli insegnanti.

Riportiamo qui di seguito l'analisi delle risposte dei docenti ad alcune

domande particolarmente significative dell'intervista scritta, rispetto alla loro disposizione emotiva.

Domanda n. 5

Puoi descrivere brevemente gli argomenti di matematica che ti piace insegnare o quelli che ti preoccupano? Perché?

- Ins. 1: I numeri decimali mi preoccupano un po'. Probabilmente per la mia inesperienza.
- Ins. 31: Le divisioni a due cifre è complesso perché richiedono più operazioni ed astrazioni da parte dei bambini.
- Ins. 2 [...] Già dalla divisione con il divisore a due cifre ho cominciato ad avere qualche preoccupazione su quale potesse essere il metodo più semplice da comprendere anche perché è difficile utilizzare dei materiali di supporto.
- Ins. 30: Mi preoccupano i numeri decimali, le equivalenze, i numeri relativi forse perché gli alunni fanno più fatica a comprenderli.
- Ins. 38: Sicuramente le difficoltà maggiori le riscontro nell'insegnamento della matematica in quarta e quinta primaria. In particolare, frazioni, operazioni con i numeri razionali, equivalenze.
- Ins. 50: Mi preoccupa sempre di riuscire a rendere chiari ai bambini proprio quegli argomenti come le frazioni che richiedono una capacità di astrazione e ragionamento che per tanti è una conquista che avviene pian piano.
- Ins. 18: Mi preoccupa insegnare le frazioni perché non mi è chiaro il ragionamento da intraprendere per poterlo spiegare agli studenti.
- Ins. 33: Mi diverto quando spiego ai ragazzi i rapporti le proporzioni, le percentuali e metto in evidenza il legame che essi hanno con le frazioni come rapporti fra numeri.
- Ins. 16: Non mi rassicura l'insegnamento delle potenze e delle frazioni per i risultati che i ragazzi spesso conseguono.

Dall'analisi delle risposte alla domanda 5 emerge che il 70% degli insegnanti intervistati esprime preoccupazione ed emozioni negative rispetto all'insegnamento delle frazioni e degli argomenti ad esse strettamente connesse, come ci si aspettava. Mentre una piccola percentuale, di circa 10%, esprime emozioni positive. In particolare, attraverso una precisa analisi testuale, è risultato che 5 docenti sono preoccupati di insegnare le divisioni a due cifre (tra i quali gli Ins. 31 e Ins. 2); per 5 docenti i numeri decimali, le equivalenze e l'intero sistema metrico decimale rappresentano un tema che suscita preoccupazione (tra i quali Ins. 1 e Ins. 30); per 10 insegnanti sono le frazioni il tema che genera emozioni negative (tra i quali Ins. 18, Ins. 38, Ins. 50); solo in 3 casi le frazioni provocano divertimento nell'insegnante (tra i quali Ins. 33). Si

può notare come, in alcuni casi, l'insegnante giustifica le sue affermazioni facendo esplicito riferimento agli effetti del suo insegnamento sulle emozioni e sull'apprendimento degli studenti (Ins. 31, Ins. 16, Ins. 18, Ins. 30).

Nella domanda successiva si chiede un riferimento esplicito ad argomenti di matematica che suscitano emozioni intense dichiarando quali emozioni.

Domanda n. 6

Ci sono degli argomenti di Matematica che ti fanno provare emozioni particolarmente intense (sia positive, che negative)? Se sì, potresti dire quali argomenti sono, cosa provi e perché?

- Ins. 30: I numeri decimali, le equivalenze e i numeri relativi mi procurano un po' di ansia e di paura perché penso che non tutti gli alunni riusciranno a comprenderli. Mi diverto a spiegare le moltiplicazioni e le tabelline e a fare giochi e gare perché è bello vedere l'entusiasmo dei bambini.
- Ins. 43: Mi entusiasmano [...] problemi con le frazioni.
- Ins. 37: Riguardo alle frazioni, mi piace la sensazione che si prova a semplificare. Ciò si verifica sia riducendo ai minimi termini la singola frazione, sia con la semplificazione a croce tra due o più frazioni nella moltiplicazione. È una procedura divertente con cui si gioca con i numeri, sostituendo gli uni con altri via via minori.
- Ins. 12: Il concetto di divisione, i numeri decimali. Mi chiedo sempre se sono stata in grado di spiegare l'argomento in maniera semplice e comprensibile.
- Ins. 41: Non mi piace molto insegnare le unità di misura e le equivalenze perché vedo spesso le difficoltà di alcuni bambini.
- Ins. 48: Le frazioni sono sempre state un po' ostiche, probabilmente perché è una lacuna mai colmata.
- Ins. 24: Per quanto riguarda le frazioni, invece, sono serena negli esercizi più semplici e compilativi, mentre quelli più concreti e differenti generano in me un senso di inadeguatezza e ho difficoltà a gestirli, anche se mi metto costantemente in gioco.
- Ins 16: Probabilmente le frazioni... ma, non so dare una risposta standard perché dipende dal feedback che ricevo dagli studenti. Ciò che li interessa e li coinvolge mi suscita emozioni positive, ciò che genera in loro noia e disinteresse mi preoccupa.

Dall'analisi delle risposte alla domanda 6 emerge che il 60% degli insegnanti intervistati esprime emozioni intense, tra cui preoccupazione, paura, senso di inadeguatezza, ancora una volta rispetto all'insegnamento delle frazioni e degli argomenti ad esse strettamente connessi, come ci si aspettava. Mentre una più

alta percentuale rispetto alla domanda 5, circa il 30%, esprime emozioni positive. In particolare, attraverso una precisa analisi testuale, è risultato che 30 docenti sono preoccupati di insegnare numeri decimali, equivalenze, frazioni, divisione e unità di misura. Gli insegnanti dichiarano che tali argomenti suscitano in loro emozioni negative in riferimento al processo di insegnamento (tra i quali Ins. 48, Ins. 24). Inoltre, molti di loro legano le preoccupazioni e le emozioni negative all'atteggiamento, in genere negativo, e all'apprendimento manifestati dai bambini (tra i quali Ins. 41, Ins. 16).

La domanda successiva ha l'obiettivo di indagare ancora più specificatamente lo stato d'animo degli insegnanti riguardo le frazioni, nell'ottica della loro azione didattica:

Domanda n. 8

Sapresti descrivere il tuo stato d'animo di fronte all'eventualità di insegnare le frazioni in una classe che ti viene assegnata? Potresti spiegare i motivi di questo stato d'animo?

- Ins. 31: Di solito il primo approccio è positivo ma quando si incomincia a passare ai numeri decimali e percentuali temo che non sia comprensibile.
- Ins. 15: Il timore di sbagliare non avendo le idee chiare sull'argomento.
- Ins. 2: Preoccupazione per il passaggio dalla frazione al numero decimale e quindi alla frazione intesa come numero vero e proprio. Perché rispetto ai numeri naturali cambiano tutte le regole anche nel calcolo.
- Ins. 30: Sono serena e tranquilla perché è un argomento che mi piace e gli alunni sono entusiasti quando lo studiano.
- Ins. 18: Provarei ansia perché si tratterebbe di un argomento per me nuovo.
- Ins. 49: Di fronte all'eventualità di insegnare le frazioni in una classe provo, all'inizio, emozioni contrastanti perché, accanto alla gioia di affrontare un argomento così importante e trasversale, c'è sempre un po' di timore di non scegliere la strategia didattica adeguata al contesto in cui si opera.
- Ins. 13: Lo affronto non completamente serena perché anche con un approccio laboratoriale so già che molto probabilmente non sarò efficace per tutti i miei studenti.
- Ins. 41: Mi sentirei abbastanza serena, a me piace scoprire strategie sempre più efficaci.
- Ins. 14: Sarei preoccupata se fosse una classe che non conosco e che non mi conosce.
- Ins. 7: Insofferenza e distacco, forse perché non mi sono mai sentita padrona dell'argomento
- Ins. 48: Insicurezza, [...].
- Ins. 38: Ansia perché non padroneggio completamente l'argomento. Dopo vari corsi e webinar sull'argomento mi rendo conto che c'è tanto da imparare sulle

frazioni. C'è un mondo dietro che a volte è sconosciuto

Ins.16: sarei preoccupata dei risultati che potrei avere perché, per l'esperienza fino ad ora avuta, spesso questo argomento risulta ostico per i ragazzi e provoca allontanamento dalla disciplina.

La percentuale di risposte che denotano una emozione non positiva è piuttosto alta; infatti 32 docenti su 50 (pari al 64%) esprimono sensazioni negative. Dalle risposte riportate, emergono tra le espressioni maggiormente ricorrenti quelle che denotano ansia, preoccupazione, disagio... Piuttosto ricorrente è anche la preoccupazione del docente di far bene il proprio lavoro, di scegliere le strategie didattiche e le metodologie più efficaci per poter garantire il successo formativo per tutti gli studenti.

L'aspetto che intimorisce di più è il passaggio dai numeri sotto forma di frazione ai numeri decimali (ad esempio, Ins. 2). Nel passaggio da una rappresentazione semiotica all'altra l'insegnante, infatti, teme di non essere in grado di guidare i suoi studenti alla piena comprensione del significato di questa nuova rappresentazione. Il problema risiede, a nostro avviso, proprio nella limitata consapevolezza del docente su come legare tra loro le diverse rappresentazioni (Kieren, 1976).

Interessante è anche notare che qualcuno (come ad es. Ins. 18 ed Ins. 30) sembra contraddirsi. Quando nella domanda n. 6 si chiede loro di indicare argomenti che causano sensazioni ed emozioni particolarmente intense la Ins. 18 dichiara che «non c'è nessun argomento» e la Ins. 30 afferma che «I numeri decimali, le equivalenze e i numeri relativi mi procurano un po' di ansia e di paura»; nel rispondere alla domanda 8 che è più esplicitamente rivolta alle frazioni l'Ins. 18 dichiara che proverebbe «ansia perché si tratterebbe di un argomento per me nuovo» (Ins. 18) mentre la Ins. 30 si sentirebbe «serena e tranquilla perché è un argomento che mi piace e gli alunni sono entusiasti quando lo studiano». Queste risposte potrebbero denotare una difficoltà nell'esprimere la propria disposizione emotiva, oppure una carenza concettuale sul legame tra frazioni e numeri decimali.

6.2 Influenza delle preoccupazioni degli insegnanti sugli studenti

Una lettura globale del questionario ci fornisce elementi di riflessione legati alla domanda di ricerca. Pur non essendo presenti, tra le domande dell'intervista, esplicite richieste del rapporto tra docente e studente e dell'eventuale legame che intercorre tra le proprie disposizioni emotive e quelle degli studenti, molti insegnanti fanno riferimento alla relazione con i loro studenti e alle loro emozioni positive legate alle reazioni degli studenti, come ad esplicitare una relazione di causa-effetto tra le due dimensioni.

- Ins. 50: Essendo alla primaria, non ci sono argomenti che mi preoccupano di per sé, ma mi preoccupo sempre di riuscire a rendere chiari ai bambini proprio quegli argomenti come le frazioni che richiedono una capacità di astrazione e ragionamento che per tanti è una conquista che avviene pian piano.
- Ins. 18: Mi preoccupa insegnare le frazioni perché non mi è chiaro il ragionamento da intraprendere per poterlo spiegare agli studenti.
- Ins. 27: La mia preoccupazione sta nel fatto che non ho strumenti adeguati per attivare i ragazzi su argomenti che andrebbero trattati precocemente, in primaria, e ho timore che in prima media sia già ‘troppo tardi’, visto che ci vuole molto tempo per assorbire e far propri i trucchi di calcolo mentale, e mi sembra di fare qualcosa di molto dispendioso in termini di tempo, e di non averne mai abbastanza.
- Ins. 13: Sicuramente le frazioni sono un argomento problematico perché non tutti gli studenti ne acquisiscono significato e operatività in modo efficace.
- Ins. 28: Adoro insegnare tutti gli argomenti di matematica perché trovo stimolante trovare le modalità coinvolgenti di tutte le lezioni per renderle accessibili a tutti
- Ins. 14: Mi piace insegnare la matematica con agganci ed esempi reali o materiale strutturato e non. Mi preoccupano i numeri decimali, perché temo che gli allievi possano non comprendere bene l’argomento.
- Ins. 3: L’emozione più grande si prova quando si legge negli occhi dei propri alunni che hanno capito e che sono sereni.
- Ins. 44: Non c’è un argomento in particolare che mi piaccia più degli altri. Di sicuro tutte le volte che devo spiegare un argomento nuovo, mi sento sempre un po’ a disagio per paura di non riuscire a farlo comprendere bene ... poi man mano che lo introduco e vedo i risultati negli alunni, ne sono soddisfatta oppure no.
- Ins. 38: Le emozioni positive emergono quando si vedono i progressi degli alunni e la loro capacità di mettere in pratica nelle situazioni reali quanto acquisito. Ovviamente in questo percorso è facile che si provi talvolta un sentimento di frustrazione e fallimento dinanzi alle difficoltà degli alunni. Mi sento sempre responsabile delle loro difficoltà di apprendimento.
- Ins. 25: L’emozione che provo è vedere gli alunni muoversi con autonomia.
- Ins. 16: [...] Dipende dal feedback che ricevo dagli studenti. Ciò che li interessa e li coinvolge mi suscita emozioni positive.

Dall’analisi dei dati emerge che l’80% dei docenti intervistati fa esplicito riferimento agli studenti, legando le proprie emozioni negative alla difficoltà degli alunni di comprendere e costruire adeguatamente i concetti di frazione e numeri decimali e le proprie emozioni positive al successo degli studenti, al loro entusiasmo e alla loro autonomia nel processo di apprendimento.

Anche l’indagine di tipo quantitativo, che si è servita dei test AMAS, MTAS e MESI, ha evidenziato delle correlazioni tra l’ansia dell’insegnante e l’ansia

dello studente (vedi Figura 1).

Dall'analisi qualitativa dei dati si evidenzia che, per quanto riguarda i docenti, maggiore è stata la loro ansia da apprendimento e da valutazione in matematica nel ricordo di quando erano bambini, altrettanto alta è la loro ansia da insegnamento come docenti nella dimensione rivolta verso i loro allievi (Hunt & Sari, 2019): i docenti che ricordano di essere stati ansiosi verso le attività di matematica si mostrano preoccupati di fare le scelte didattiche corrette, per favorire il percorso di apprendimento dei loro alunni.

Per quello che riguarda la relazione tra insegnanti e alunni, dalle correlazioni effettuate sui risultati dei test si evince che a minore ansia da insegnamento della matematica da parte del docente, corrispondono minore ansia da apprendimento degli alunni e migliori risultati accademici nelle performance in matematica.

In altri termini, un'alta performance degli studenti è associata ad una bassa ansia del docente, così come ad una bassa ansia da apprendimento degli studenti sono associati bassi livelli di ansia dei docenti rivolta verso sé stessi.

Figura 1

Matrice di correlazione

Matrice di Correlazione			Docenti				Mat_Tot	AMAS_AP	AMAS_VAL (2)
			PUPIL	SELF	AMAS_APP	AMAS_VAL			
TAQ_TOT	r di Pearson	—							
	valore p	—							
PUPIL	r di Pearson	0.043	—						
	valore p	0.535	—						
SELF	r di Pearson	-0.143 *	0.270 ***	—					
	valore p	0.040	<.001	—					
AMAS_APP	r di Pearson	0.060	-0.515 ***	0.017	—				
	valore p	0.387	<.001	0.805	—				
AMAS_VAL	r di Pearson	0.019	-0.391 ***	0.281 ***	0.901 ***	—			
	valore p	0.787	<.001	<.001	<.001	—			
Mat_Tot	r di Pearson	-0.062	-0.013	0.171 *	0.093	0.075	—		
	valore p	0.376	0.852	0.014	0.182	0.280	—		
AMAS_AP	r di Pearson	0.376 ***	-0.059	-0.264 ***	0.004	-0.038	-0.204 **	—	
	valore p	<.001	0.401	<.001	0.957	0.586	0.003	—	
AMAS_VAL (2)	r di Pearson	0.599 ***	0.103	-0.135	0.087	0.042	-0.113	0.528 ***	
	valore p	<.001	0.138	0.052	0.214	0.547	0.103	<.001	

Nota. * p < .05, ** p < .01, *** p < .001

6.3 Il corso di formazione per la gestione dei fattori emotivi, nello sviluppo delle attività didattiche

Dopo aver preso atto delle emozioni che i docenti provano riguardo all'insegnamento delle frazioni, si è passati ad una attività di formazione in pratica. Tale attività è stata ispirata da un problema aperto (Figura 2), che offre

molteplici livelli di intervento.

Il problema è stato utilizzato per avviare una riflessione sugli errori degli studenti e sulle difficoltà che gli insegnanti si aspettano. È stato risolto dai docenti i quali ne hanno successivamente fatto una analisi a priori secondo la teoria interpretativa (Mellone et al., 2018). Infine, è stato utilizzato per realizzare attività sperimentali nelle classi, insieme agli studenti.

Figura 2

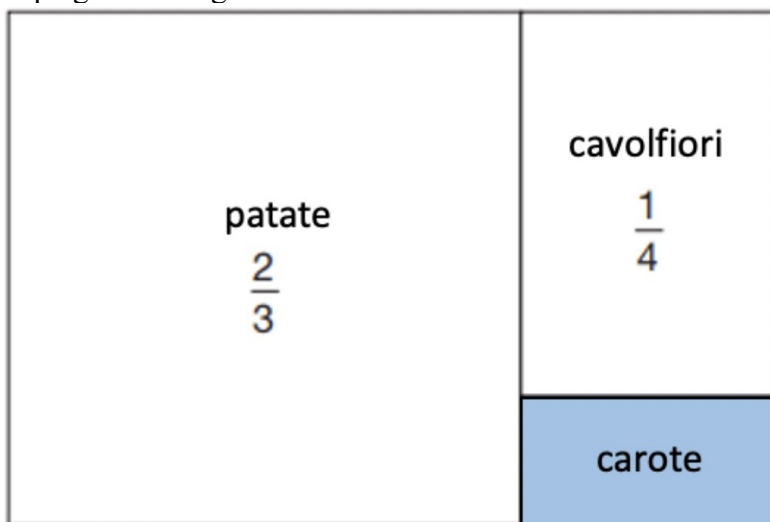
Il problema dell'orto

Il problema dell'orto

Questo è il disegno di un orto. Mostra le parti (frazioni) del giardino coltivate con patate e cavolfiori. La parte restante è coltivata con carote.

Quale parte dell'orto è coltivata con le carote?

Spiega il tuo ragionamento.



Qui di seguito si riportano le risposte degli insegnanti alle domande circa le difficoltà e gli errori che, secondo loro, gli studenti incontrerebbero di fronte ad un problema di questo tipo.

Domanda n. 1

Rispetto alle usuali difficoltà riscontrate dai tuoi studenti nell'apprendimento delle frazioni, a quali difficoltà andrebbero incontro i tuoi alunni nel risolvere questo problema?

Alcune tra le risposte:

- Ins. 2: Non riuscirebbero ad aggiungere le frazioni con denominatore diverso.
- Ins. 4: Capire che per risolvere il quesito devono ridurre le frazioni allo stesso denominatore. Penso che li spazzerebbe il fatto di trovare le due frazioni con diverso denominatore, quasi fossero due oggetti non collegati né collegabili. Penso che avrebbero difficoltà anche a capire che per risalire alla frazione mancante debbano sottrarre al numero 1 le altre due frazioni. Ho riscontrato ad esempio la difficoltà nel calcolare la frazione complementare a quella data, che per me era invece quasi banale.
- Ins. 5: Capire come calcolare il denominatore. Avrebbero difficoltà nel considerare parte dell'intero frazioni con denominatore diverso.
- Ins. 10: Rimarrebbero interdetti.
- Ins. 12: Non tutti sarebbero in grado di capire di dover lavorare con frazioni equivalenti.
- Ins. 13: Solo adesso mi accingo a presentare agli alunni questo argomento.
- Ins. 14: Moltissime difficoltà.
- Ins. 16: Trovare indicate frazioni con denominatori diversi e non intuire di ricondurle allo stesso denominatore per individuare la parte mancante.
- Ins. 17: Una delle difficoltà per un bambino di scuola primaria potrebbe essere quella di non avere a disposizione oggetti identici (denominatori uguali).
- Ins. 20: La percezione di non riuscire a quantificare la frazione carote da un punto di vista visivo per la presenza di denominatori diversi.
- Ins. 24: Non saper svolgere l'esercizio; Non saper ricostruire le parti dell'intero; Si bloccherebbero e avrebbero timore a svolgere l'esercizio.
- Ins. 28: Nel comprendere bene la traccia.
- Ins. 22: A come calcolare la frazione di orto destinata alle carote.
- Ins. 27: Problemi legati alla comprensione del testo e alla difficoltà di immaginarsi la situazione in maniera pratica.
- Ins. 34: Andrebbero in ansia.
- Ins. 38: Avrebbero difficoltà nell'individuare la risposta.
- Ins. 41: Avrebbero difficoltà nel gestire frazioni con denominatori diversi.
- Ins. 53: Il livello di difficoltà del problema è superiore alle loro conoscenze.

Gli esempi qui riportati possono essere esemplificativi per il diverso tipo di risposta fornita dai docenti.

Dal punto di vista del contenuto matematico, il 38% degli insegnanti fa esplicito riferimento ai 'denominatori diversi' come causa di difficoltà. 6 insegnanti richiamano le frazioni equivalenti, 3 le frazioni complementari e altri, tra cui l'Ins. 45 e Ins. 8, fanno riferimento alla procedura risolutiva.

Un elemento particolarmente interessante, a nostro avviso, è la percentuale di docenti che fornisce una risposta generica, che si limita a parafrasare il problema o non dà alcuna risposta: 18 insegnanti, pari al 36 %, rispondono in modo vago (come ad esempio Ins. 14, 24, 28, 34, 38), un paio si limitano a fare una parafrasi

della domanda del problema (come l'Ins. 22), altri evitano di fornire una risposta.

Questa tipologia di risposte, a nostro avviso, è caratterizzata da uno stile attributivo esterno, ovvero gli insegnanti individuano nello studente l'unico responsabile del fallimento. In questa fase iniziale gli insegnanti intervistati mostrano un atteggiamento di 'deresponsabilizzazione' della propria azione didattica, individuando come cause delle difficoltà dei loro studenti elementi di carattere cognitivo (come la comprensione della traccia, il ricordare e applicare correttamente una procedura) o emotivo (come l'ansia).

Il questionario prosegue con una domanda che ha l'obiettivo di avviare una riflessione maggiormente focalizzata sul senso dell'errore e sul suo valore.

Domanda n. 2

Quali sono gli errori che ti aspetti, in riferimento a questo problema?

A titolo esemplificativo vengono qui riportate alcune tra le risposte maggiormente significative:

Ins. 2: Tirerebbero ad indovinare, molti risponderebbero un terzo.

Ins. 4: Errori di impostazione del procedimento. Errori di calcolo di somma e differenza tra frazioni.

Ins. 5: Potrebbero pensare che ci sia un errore nella traccia per la presenza di denominatori differenti.

Ins. 10: Qualcuno potrebbe affrettarsi senza ragionare.

Ins. 13: Non saper confrontare le frazioni presentate con un denominatore diverso.

Ins. 16: Potrebbero sommare le frazioni.

Ins. 20: La difficoltà di risoluzione.

Ins. 33: Errori di calcolo dell'operazione, mancata risoluzione a causa di difficoltà legate a considerare l'intero uguale all'unità.

Ins. 39: Che la somma delle frazioni di patate e cavoli per loro rappresenti la frazione coltivata a carote!

Ins. 25: Tanti.

Ins. 26: In un approccio prettamente aritmetico l'errore che mi aspetto è la somma dei denominatori.

Ins. 9: Spesso non portano a termine i calcoli, cioè si fermano al primo risultato ottenuto, senza pensare che alla richiesta effettiva del comando.

Ins. 35: Pensare che il problema sia irrisolvibile o considerarsi incapaci.

Ins. 37: L'errore più frequente potrebbe essere il calcolo del m.c.m. oppure nella trasformazione nelle frazioni equivalenti.

Ins. 36: Che non riescano a risolverlo.

Ins. 45: Errori di procedura, errori sull'esecuzione delle addizioni/sottrazioni tra frazioni, mancata applicazione del concetto di frazione complementare.

Ins. 16: Potrebbero sommare le frazioni.

Ins. 11: Risposte non date, risposte a caso, non motivate. Operazioni non richieste.

- Da una analisi puntuale, le risposte degli insegnanti rispetto agli errori che gli studenti potrebbero commettere in riferimento a questo problema possono essere così categorizzate: errori dovuti alla fretta, alla superficialità, al mancato ragionamento o a rinuncia da parte dello studente a causa di ragioni emotive;
- errori di tipo procedurale non meglio specificati o riconducibili alla risoluzione parziale del problema;
- errori di calcolo nelle operazioni con le frazioni, nel calcolo del mcm...;
- errori che dipendono dal contenuto matematico come l'unità frazionaria, la relazione tra parti di uno stesso intero, somma tra frazioni con denominatori diversi, il concetto di intero e di parti di un intero, la divisione in parti non uguali di uno stesso intero...

Questi ultimi errori sono effettivamente gli stessi riconosciuti in letteratura (DeWolf & Vosniadou, 2015; Lortie-Forgues et al., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Torbeyns et al., 2015) e rappresentano le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi con le frazioni.

L'analisi di tipo qualitativo mette in risalto che il 20% dei docenti non risponde esplicitamente alla domanda, ma fornisce una risposta generica (Ins. 10, 25, 36...). Tale risposta non ammette alcuna possibilità di intervento da parte del docente: l'errore sembra dipendere solo dagli studenti, dalla loro fretteolosità, dalla loro scarsa abitudine a riflettere o dallo scarso esercizio dedicato al tema, riducendo drasticamente il coinvolgimento e la responsabilità dell'insegnante.

Il 16% dei docenti (tutti di scuola secondaria di I grado) fanno riferimento alle procedure e all'applicazione di formule per la risoluzione del problema, il 20% fa riferimento a generici 'errori di calcolo' senza meglio indicare il tipo di errore. Di questi, 6 sono docenti di scuola primaria e questo dato appare piuttosto interessante: alla scuola primaria solitamente non si eseguono operazioni con le frazioni secondo procedure algoritmiche definite. Ci si domanda, quindi, a quale tipo di errore di calcolo si riferiscano le docenti. Si pensa, piuttosto, che l'espressione 'errore di calcolo' sia più che altro una tipologia di errore a cui si fa comunemente riferimento nella valutazione.

Nel complesso le risposte degli insegnanti evidenziano una certa consapevolezza delle difficoltà del tema matematico, ma denotano una certa difficoltà da parte dei docenti, sia nella gestione dell'argomento in oggetto e sia nell'approccio metodologico didattico da adottare per l'insegnamento dello stesso.

Riflessioni interessanti nascono dal confronto delle risposte dei diversi

questionari, da parte degli stessi insegnanti. L'Ins. 13, rispondendo alla domanda su quali si pensa siano le difficoltà che i propri studenti incontrerebbero nel risolvere il problema dell'orto, aveva inizialmente dichiarato che «Non tutti sarebbero in grado di capire di dover lavorare con frazioni equivalenti» esplicitando così l'effettiva problematica legata al tema di frazioni e numeri decimali. Però lo stesso insegnante, in riferimento ad una domanda su quali si pensa siano le cause che determinano gli errori, rispetto alla risoluzione del problema in questione, evidenzia l'aspetto puramente meccanico della risoluzione del problema, legato ad una procedura che va ricordata: «ricordare come calcolare il minimo comun denominatore».

Si è ritenuto indispensabile, durante il corso di formazione, attirare l'attenzione dei docenti sull'aspetto relazionale della matematica, lasciando passare in secondo piano quello procedurale. È vero infatti che, al termine del percorso i docenti di alunni di classe III primaria hanno verificato che i loro alunni, pur non conoscendo affatto la procedura di calcolo del mcm sono stati perfettamente in grado di risolvere il problema, ricorrendo al concetto di 'unità di misura' che può ricoprire l'intero campo, nonché singolarmente le altre porzioni di campo coltivate con ortaggi differenti.

Le riflessioni nelle attività di gruppo tra docenti, durante l'analisi del problema e la sua soluzione, hanno messo in luce che le difficoltà da loro individuate possono essere risolte con un approccio che miri alla costruzione del significato profondo del concetto di frazione e non all'applicazione di una procedura meccanica che rischia di essere dimenticata.

La domanda n. 3 va maggiormente a fondo e mira ad indagare le cause degli errori degli studenti.

Domanda n. 3

Quali sono, secondo te, le cause di questi errori?

Qui di seguito solo alcune delle risposte più significative:

- Ins. 11: Poca fiducia in sé stessi, paura di mettersi in gioco, poca riflessione, poca concentrazione, ansia di rispondere.
- Ins. 5: Mancanza di riflessione e poca abitudine ad eseguire esercizi che presentano inferenze.
- Ins. 12: Percorso didattico non adeguato.
- Ins. 21: Ragionamento sbagliato.

Per gli insegnanti, le cause degli errori degli studenti sono di molteplice natura.

Un'alta percentuale dei docenti (68%) manifesta attribuzione esterna di responsabilità, individuando negli studenti e nel loro comportamento le cause degli errori (mancata comprensione del concetto nelle sue numerose sfaccettature, mancanza di ragionamento o errori di ragionamento, scarsa capacità di astrazione, non comprensione del testo del problema, scarso esercizio, scarsa attenzione o poca predisposizione...).

Un'esigua minoranza (6%) riconosce le caratteristiche epistemologiche complesse del tema matematico e il 20% riconosce tra le cause degli errori motivazioni di tipo didattico (didattica tradizionale, didattica non laboratoriale e distante dal concreto, percorsi didattici non efficaci...). L'ultimo 6% non risponde o fornisce risposte errate.

L'ultima domanda su cui si vuole concentrare l'attenzione chiede ai docenti di ipotizzare strategie per affrontare e risolvere il problema, in un'ottica di rimozione delle difficoltà.

Domanda n. 4

Quale intervento didattico pensi possa favorire il superamento di tali difficoltà ed evitare di incorrere negli errori?

Ins. 1: Esercitazioni pratiche con uso di materiale non strutturato.

Ins. 4: Probabilmente la manipolazione di oggetti concreti che rappresentino l'intero e le sue parti e che permettano di vedere come frazioni con denominatore diverso siano di fatto riconducibili a frazioni equivalenti rappresentanti porzioni diverse di uno stesso intero. Relativamente agli errori nella somma e differenza di frazioni, penso che lezioni precedenti che possano insistere sul calcolo mentale del mcm tra semplici numeri, con la stesura condivisa delle strategie ad esso relative, possa aiutare gli studenti all'automatizzazione dei calcoli necessari.

Ins. 6: Lettura ad alta voce della traccia del quesito da parte dell'insegnante.

Ins. 12: Stampare il foglio che rappresenta l'orto e farlo piegare.

Ins. 14: Si potrebbe lavorare con un modellino di carta che riproduca le parti unitarie contenute nelle frazioni.

Ins. 16: Trovare un modo semplice per far capire il meccanismo che c'è dietro il quesito.

Ins. 19: Il ricorso a questo tipo di esercizio.

Ins. 25: L'intervento didattico sull'argomento delle frazioni deve essere il più possibile laboratoriale, deve fare scoprire caratteristiche e proprietà delle frazioni attraverso la proposizione continua di situazioni problematiche di difficoltà crescente e la abitudine all'uso di materiale concreto per rappresentare le frazioni e risolvere le situazioni problematiche con esse.

- Ins. 30: Lavorare sul significato delle parti di un intero, utilizzando diversi modelli.
- Ins. 34: Allenarsi svolgendo molti calcoli di m.c.d. utilizzando differenti coppie o triplette di denominatori. Per le tabelline memorizzazione anche attraverso l'uso di tavole pitagoriche.
- Ins. 35: Lavoro laboratoriale sulle frazioni.
- Ins. 46: Favorire la comprensione, il ragionamento e lasciare spazio alle attività laboratoriali.

Per il 42% dei docenti la didattica laboratoriale e la didattica legata a situazioni pratiche e sperimentali rappresenta l'intervento didattico che ridurrebbe le difficoltà. Il 34 % fa riferimento esplicito all'uso di strumenti, materiale non strutturato, modelli concreti (foglio di carta da piegare e tagliare, foglio quadrettato, cartoncino...). Solo per una minoranza di docenti la soluzione sta nel fare molto esercizio, nella lettura ad alta voce della traccia, nell'individuare il meccanismo. Per questi si delinea un approccio di tipo maggiormente procedurale, rivolto al prodotto più che al processo e alla costruzione del profondo significato di frazione (10%).

6.4 Il passo successivo: verso il cambiamento di atteggiamento del docente

Dall'analisi dei primi tre strumenti si delinea una certa predisposizione verso un approccio didattico diverso rispetto a quello tradizionale. I docenti sembrano essere consapevoli del fatto che l'approccio laboratoriale e le attività manipolative concrete legate a problemi aperti siano più funzionali alla costruzione dei significati e alla profonda comprensione del concetto di frazione.

Per permettere che queste idee trovino il loro fondamento in attività didattiche condivise, si passa alla fase di formazione 'in pratica' (Ball & Even, 2009). Tale attività consente una trasformazione della pratica didattica attraverso azioni concrete realizzate dagli insegnanti, durante la formazione: i docenti sono messi nella condizione di tenere traccia dei loro processi di pensiero, migliorando le loro conoscenze disciplinari (*teachers' knowledge*) attraverso una meta-riflessione sulla pratica didattica rivolta agli studenti (*knowledge in teaching*) (Even et al., 2009).

A questo scopo è stato utilizzato proprio il 'problema dell'orto' per avviare quella riflessione di carattere matematico e metacognitivo.

Il 'problema dell'orto', infatti, mostra di avere tutte le caratteristiche di un problema aperto (Pehkonen, 1997): non avendo un'unica modalità di soluzione, consente al docente di acquisire consapevolezza della sua effettiva conoscenza (ciò che Ball e Bass definiscono *Mathematical Knowledge for Teaching* (Loewenberg Ball et al., 2008) riguardo a un tema specifico e permette di discutere con i colleghi secondo i principi della discussione collettiva (Bartolini

Bussi, 1989a, 1989b). L'analisi a priori, svolta nell'ottica della teoria interpretativa (Mellone et al, 2018), mette l'insegnante nella posizione di interrogarsi sulle conoscenze dei suoi studenti attraverso la verifica delle proprie, permette di fare previsioni su quelle che saranno le difficoltà degli allievi, non perdendo mai di vista i contenuti indispensabili per poter insegnare.

Attraverso le domande poste nell'analisi a priori gli insegnanti riflettono sulle difficoltà attese, sul collegamento ai contenuti matematici in riferimento alle Indicazioni Nazionali del 2012 e sulle possibili strategie risolutive per affrontare il problema.

Per mettere in evidenza il cambiamento di atteggiamento dei docenti e l'acquisizione di una maggiore consapevolezza nella loro azione didattica, si riporta qui di seguito il confronto tra le risposte ad alcune domande dell'intervista, del questionario generale sulle difficoltà del problema e dell'analisi a priori.

Si sceglie di mettere a confronto alcune domande dei tre strumenti qualitativi che denotano un cambiamento nell'atteggiamento da parte di alcuni insegnanti.

Tabella 1

Questionario sulle difficoltà e analisi a priori

Intervista scritta	Questionario sulle difficoltà (in riferimento al problema dell'orto)	Analisi a priori (problema dell'orto)
<p>9) Quali pensi siano le maggiori difficoltà che incontrano i tuoi studenti con le frazioni (riconoscere frazioni equivalenti, individuare unità frazionarie, calcolare la frazione di un numero, moltiplicare o dividere frazioni...)?</p>	<p>5) Se dovessi proporre questo problema alla tua classe, qual è l'aspetto che maggiormente ti preoccupa?</p>	<p>4) Prova ad individuare tutte le possibili strategie risolutive (corrette) che pensi possano sviluppare gli studenti e anche quelle che, secondo te, un esperto potrebbe mettere in atto, ma gli studenti no (spiegando il perché).</p>
<p>Ins. 2: Per i miei alunni sicuramente i primi problemi nascono nel considerare le frazioni come numeri e quindi collocarli sulla linea dei numeri.</p>	<p>Ins. 2: Probabilmente non riuscirebbero a ripeterlo in autonomia</p>	<p>Ins. 2: Nella scuola primaria non vengono affrontate le addizioni con denominatore diverso. Gli studenti di scuola primaria dovrebbero essere guidati per la risoluzione attraverso la scoperta delle frazioni equivalenti con lo stesso denominatore per</p>

		poterle sommare e trovare quella complementare che è la frazione corrispondente alla parte restante coltivata con carote.
<p><i>Ins. 5:</i> La collocazione delle frazioni sulla linea dei numeri...perché ho notato che i bambini fanno fatica a ‘vedere’ l'intero che va per es. da zero ad uno sulla linea dei numeri.</p>	<p><i>Ins. 5:</i> (mi preoccupa) che non si soffermino sull'analisi completa degli elementi noti; l'intuizione della esatta procedura.</p>	<p><i>Ins. 5:</i> Partendo dalla visualizzazione e dalla manipolazione della figura intera i bambini potrebbero notare in prima istanza che l'intero è suddiviso in 3 parti e che la parte delle carote (il colore differente aiuta la valutazione) è contenuta 4 volte in ciascuna di esse; sommando tutte le parti arriverà a capire che la parte delle carote rappresenta la dodicesima parte, cioè l'unità frazionaria dell'intero. Dal punto di vista dell'esperto: manipolando (anche attraverso azioni di ritaglio) la parte delle carote si potrebbe facilmente osservare che è contenuta 4 volte nell'intera sezione che rappresenta $\frac{1}{3}$ dell'intero di partenza (tralasciando la frazione che corrisponde ai cavolfiori). Quindi si giunge alla conclusione che la parte delle carote rappresenta l'unità frazionaria dell'intero, ossia $\frac{1}{12}$. Proseguendo il ragionamento, per deduzione, si arriverà a capire che la frazione $\frac{1}{4}$ non è altro che una diversa suddivisione dell'intero (non in 3 ma in 4 parti). L'esperto potrebbe anche indurre il ragionamento su un livello matematico più astratto attraverso l'impostazione di una espressione.</p>

<p><i>Ins. 8:</i> La difficoltà maggiore è associare alla frazione il numero razionale corrispondente e in particolare confrontare le frazioni e collocarle sulla linea dei numeri.</p>	<p><i>Ins. 8:</i> Il fatto che non capiscano che non devono fermarsi al primo risultato ottenuto.</p>	<p><i>Ins. 8:</i> Strategie risolutive degli studenti:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Strategia mediante uso rappresentazione grafica: lo studente suddivide l'intero orto (il rettangolo grande) in tanti rettangoli congruenti al rettangolo che rappresenta la parte coltivata con le carote. Successivamente conta il numero di rettangoli ottenuti e si accorge che sono in tutto 12 e che quindi la parte delle carote rappresenta $1/12$. 2. Strategia mediante calcolo aritmetico: lo studente addiziona le due frazioni note, mediante il calcolo del m.c.m. dei denominatori, e sottrae la frazione ottenuta dall'intero. 3. Strategia mediante calcolo aritmetico per sottrazioni successive: lo studente sottrae dall'intero prima la frazione $2/3$, successivamente alla differenza ottenuta sottrae la frazione $1/4$. <p>Strategia risolutiva esperto: La procedura è la stessa del punto 2, ma i calcoli vengono rappresentati mediante un'espressione aritmetica.</p>
---	---	--

Queste tre risposte vogliono essere solo esemplificative e mettere in evidenza come l'analisi a priori consenta una riflessione approfondita e circostanziata, che permette al docente, nel confronto con i colleghi, di dare forma concreta alle ipotetiche azioni degli studenti, in classe. Queste poche risposte tracciano in modo abbastanza chiaro una 'evoluzione' nell'atteggiamento del docente verso questo argomento. In un primo momento, infatti, le risposte degli insegnanti circa le difficoltà degli studenti, i loro errori e le eventuali strategie per intervenire su di essi sono apparse piuttosto generiche e poco circostanziate, come se l'argomento restasse 'fermo' nella sua complessità e distante dalla reale pratica didattica. Quando, invece, si chiede ai docenti di lavorare concretamente sulla

risoluzione del problema e di riflettere su quali potrebbero essere le difficoltà degli studenti, sulle loro azioni reali, l'attività a cui i docenti si riferiscono diventa anch'essa reale ed è perfettamente rispondente a ciò che accade in classe. Non si parla più di studenti ipotetici, di difficoltà teoriche, di strategie eventuali: si tratta di affrontare e risolvere un problema, di guardarlo con gli occhi dell'esperto (docente) e con quelli dello studente che deve gradualmente costruire il suo sapere.

Grazie all'analisi a priori del problema dell'orto i docenti hanno manifestato una maggiore consapevolezza di quali sono le conoscenze matematiche coinvolte, riconoscendole ed esplicitandole, di quali potrebbero essere le strategie messe in atto dagli studenti e di quali metodologie possono essere utilizzate per progettare e realizzare un'attività didattica da proporre nelle classi.

Quando i docenti, riuniti in piccoli gruppi, sono stati chiamati a ragionare sulle possibili strategie risolutive messe in atto dagli studenti, hanno fatto riferimento ad alcune idee che potrebbero rappresentare azioni concrete dei loro alunni. Gli studenti diventano reali e gli insegnanti ne immaginano le azioni, come se fossero lì, davanti a loro. Così immaginano che i ragazzi faranno ricorso ad artefatti quali foglio di carta quadrettata, righello, compasso... per risolvere il problema in modo empirico. Si prevede la realizzazione su carta del disegno dell'orto e la creazione dell'unità frazionaria 'carote' per ricoprirlo, riempirlo. Ci si aspetta la realizzazione su carta del disegno dell'orto e la divisione della figura in parti uguali con l'ausilio del righello, creando una sorta di 'griglia'. La parte coltivata a carote diventa l'unità di misura per ricoprire tutto il campo e consente di giungere alla soluzione. Qualcuno ipotizza l'utilizzo del righello (e del compasso) per prendere le misure e verificare attraverso i calcoli qual è il rapporto tra area dell'intero orto e area della parte coltivata a carote. Per gli studenti di scuola secondaria di I grado i docenti prevedono l'esecuzione di calcoli con le frazioni e l'utilizzo di alcune 'regole' quali l'individuazione del mcm, la somma e la differenza tra frazioni, la realizzazione di espressioni numeriche con le frazioni.

Ciò che emerge in modo condiviso è la trasformazione delle frazioni note in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore per poterle, poi, sommare. L'idea di lavorare con le frazioni equivalenti permette a tutti gli alunni, anche quelli più piccoli, di risolvere il problema, senza fare ricorso ad algoritmi di calcolo con le frazioni (obiettivo non previsto dalle I.N. per la scuola primaria).

Il momento di analisi a priori, dunque, mette d'accordo tutti i docenti: il problema può essere affrontato nelle diverse classi, dalla III primaria alla III media, attraverso modalità e approcci diversi, ma consente a tutti gli studenti di affrontare il concetto di frazione da più punti di vista, contribuendo alla costruzione graduale di un concetto articolato e complesso come esso è.

6.5. Conclusioni

Riflessioni a posteriori permettono di comprendere quale sia il valore formativo di una attività ‘nella e per la pratica’ durante la formazione dei docenti. Sperimentare in prima persona la risoluzione di un problema, realizzarne un’analisi a priori riflettendo sulle possibili strategie risolutive e sugli errori più probabili contribuisce ad arricchire l’esperienza dell’insegnante che prosegue la sua formazione professionale ‘in e attraverso la pratica’.

In questo tipo di attività il docente costruisce la consapevolezza della propria MKT, riflette attraverso un confronto con i suoi colleghi su come poter affrontare in classe, con gli alunni, un determinato problema, avendo chiari gli obiettivi che si è prefisso di raggiungere.

Queste azioni generano un effetto sinergico di riduzione del senso di disagio e preoccupazione che il docente prova riguardo a temi particolarmente complicati, come quello delle frazioni e dei numeri razionali, e permettono un cambio di atteggiamento verso il contenuto da insegnare e la modalità didattica da utilizzare per ottenere migliori risultati in classe.

A nostro avviso, la doppia natura del problema da cui è partita la ricerca offre una base interessante per ulteriori percorsi di ricerca. Come è noto, tutti gli aspetti di carattere psicologico coinvolti nel processo di insegnamento che riguardano docenti e studenti (emozioni nell’insegnamento, senso di autoefficacia, motivazione, ansia da insegnamento, autostima, relazione con il proprio insegnante...) si legano strettamente ad aspetti più propriamente di carattere didattico. Le problematiche legate alle difficoltà di apprendimento riguardano più strettamente i docenti, i quali sono chiamati a riconsiderare non soltanto le loro conoscenze disciplinari (ciò che Shulman definisce *content knowledge* (Shulman, 1986)) ma anche (e soprattutto) le conoscenze di tipo pedagogico (*pedagogical content knowledge* e la sua revisione più recente in *mathematical knowledge for teaching* di Ball e Bass (Ball & Bass, 2002) e metodologico che possono rappresentare un mezzo per dare senso alle proprie scelte didattiche e per progettare e realizzare attività che mirino a ridurre le difficoltà per gli studenti.

Riferimenti bibliografici

- Almalki, S. (2016). Integrating Quantitative and Qualitative Data in Mixed Methods Research—Challenges and Benefits. *JEL*, 5(3), 288. <https://doi.org/10.5539/jel.v5n3p288>
- Ball, D.L., & Bass, H. (2002). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002*

- Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3–14). CMESG/GCEDM.
- Ball, D.L., & Even, R. (2009). Strengthening practice in and research on the professional education and development of teachers of Mathematics: next steps. In R. Even & D.L. Ball, *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 255–259). New York.
- Bartolini Bussi, G. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della Matematica (parte 1). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12(1), 5–49.
- Bartolini Bussi, G. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della Matematica (parte 2). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12(5), 616–654.
- Bartolini Bussi, G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: Artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 32(A-B), 269–294.
- Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & M.G. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of Interantional Reserach in Mathematics Education* (II ed.) (pp. 746–783). Routledge Taylor & Francis Group.
- Bosica, J. (2022). Using a Mixed Methods Approach to Study the Relationship Between Mathematics Anxiety, Mathematics Teacher Efficacy, and Mathematics Teaching Anxiety in Preservice Elementary School Teachers in Ontario. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(1), 190–209. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00203-8>
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x>
- Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg, T.A. (Eds.). (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Erlbaum.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Caviola, S., Primi, C., Chiesi, F., & Mammarella, I.C. (2017). Psychometric properties of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS) in Italian primary school children. *Learning and Individual Differences*, 55, 174–182. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.006>
- Courant, R., & Robbins, H. (2009). *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi*. A cura di I. Stewart (II ed. riveduta). Bollati Boringhieri.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Difficoltà di apprendimento in Matematica. Il punto di vista della didattica*. Pitagora.

- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 29B(1), 11–40.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press.
- DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, 37, 39–49. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27–48. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z>
- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Psychology Press.
- Even, R., Ball, D.L., Artigue, M., & Hodgson, B.R. (Eds.). (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (Vol. 11). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8>
- Fandiño Pinilla, M.I. (2023). *Le frazioni. Matematica, storia e didattica*. Bonomo.
- Fiorentino M.G., Mariotti M.A., Montone A. (2023). Prospective mathematics teachers' professional development through Meta Discussion on a Pedagogical model. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3435–3442). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Guba, E. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. *Educational Technology Research and Development* 29,(2), 75–91. <https://doi.org/10.1007/BF02766777>
- Hersh, R., & Dehaene, S. (1998). The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 105(10), 975–976. <https://doi.org/10.2307/2589308>
- Hill, H.C., Blunk, M.L., Charalambous, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L., & Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Hunt, T. E., & Sari, M. H. (2019). An English Version of the Mathematics Teaching Anxiety Scale. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 6(3), 436–443. <https://doi.org/10.21449/IJATE.615640>
- Kieren, T.E. (1976). *On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. Number and Measurement. Papers from a Research Workshop. Research Report 238* ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Mellone, M., Ribeiro, C.M., & Jakobsen, A. (2018). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 3, 50–62. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.3.3.1>
- Moè, A., Pazzaglia, F., & Friso, G. (2010). *Motivazioni, emozioni, strategie e insegnamento: MESI; questionari metacognitivi per insegnanti*. Erickson.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S.M., & Moeller, K. (2019). Understanding Fractions: Integrating Results from Mathematics Education, Cognitive Psychology, and Neuroscience. In A. Norton & M.W. Alibali (Eds.), *Constructing Number* (pp. 135–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_7
- Pehkonen, E. (A c. Di). (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom. Research Report 176*. Dept. of Teacher Education, University of Helsinki & ERIC.
- Pellerey, M. & Orio, F. (1996). La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica, *ISRE*, 2, 52–73.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3–17. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001>
- Resnick, I., Jordan, N.C., Hansen, N., Rajan, V., Rodrigues, J., Siegler, R.S., & Fuchs, L.S. (2016). Developmental growth trajectories in understanding of fraction magnitude from fourth through sixth grade. *Developmental Psychology*, 52(5), 746–757. <https://doi.org/10.1037/dev0000102>
- Sharma, S. (2013). Qualitative Approaches in Mathematics Education Research: Challenges and Possible Solutions. *Education Journal*, 2(2), 50–57. <http://dx.doi.org/10.11648/j.edu.20130202.14>
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives*, 8(3), 144–150. <https://doi.org/10.1111/cdep.12077>
- Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4), 346–351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>
- Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691–697. <https://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 148–152.). Springer.

- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5–13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>
- Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1–4. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001>
- Villani, V. (2014). *Cominciamo da Zero*. Pitagora.
- Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14(5), 445–451. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014>